О.Н. Романюк,
О.О. Дудник

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПІКСЕЛА

Анотація

Розглянуто основні математичні моделі піксела, їх переваги та недоліки, сфери застосування. Обґрунтовано потребу в розробці нових моделей проблеми їх реалізації.

У сучасній тривимірній комп'ютерній графіці існує ряд методик підвищення якості зображення та уникнення спотворень, обумовлених недостатньою розподільною здатністю дискретної решітки (фільтрація текстур, антиаліайзинг та ін..). Так чи інакше завданням цих алгоритмів є визначення кольору конкретного піксела у залежності від його розташування та кольорів інших пікселів. При цьому складність обчислення та якість результуючого зображення великою мірою залежить від математичної моделі піксела, то б то набору фізичних характеристик піксела, що беруться до уваги під час обрахунків. Здебільшого піксель розглядається не як умовна точка, а як скінчена область, оскільки в реальних пристроях відображення піксель не є ідеальною точкою, а має певну форму [1].

В більшості існуючих алгоритмів піксель розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці, оскільки при цьому значно спрощуються обчислення. Математична модель піксела, в якій останній розглядається як круг з діаметром, який дорівнює одиниці, більш адекватна реальності. Більш високу якість забезпечують моделі, які враховують, що інтенсивність світла, яке випромінює піксель, є максимальною в центрі піксела та зменшується при віддаленні від нього [2].

Характерна особливість аналітичних методів антиаліайзингу полягає в тому, що під час дискретизації неперервного зображення враховуються технічні характеристики пристроїв відображення. У загальному вигляді для обчислення інтенсивності кольору піксела використовується вираз [3, 4, 8, 12]:

$$I_A(P_x, P_y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} I_{ідеал}(x, y) \cdot F(x - P_x, y - P_y) dx\, dy, \tag{1.1}$$

де I_A - інтенсивність кольору піксела з координатами (P_x, P_y) (у випадку кольорового зображення окремо обчислюють інтенсивність кожної з трьох складових компонент кольору); $I_{ідеал}(x, y)$ – аналітична функція, яка задає інтенсивність кольору в кожній точці простору; $F(x, y)$ - модель піксела, тобто функція, яка описує просторове розподілення світла, що випромінюється пікселом. Дану функцію часто називають функцією фільтра [3, 4].

У загальному випадку обчислення виразу (1.1) для довільної аналітичної функції опису зображення та довільної моделі піксела є достатньо складною математичною задачею, яка потребує великих обчислювальних витрат [4, 3, 12]. Тому в більшості розроблених на даний час аналітичних методах антиаліайзингу [5, 6, 10, 11] розглядається частковий випадок знаходження інтегралу (1.1) для обмеженого класу графічних примітивів та функцій фільтра [3, 4, 7].

Для основних графічних примітивів, таких як відрізок прямої, багатокутник, коло, еліпс існують досить прості аналітичні вирази, що описують їхні геометричні властивості. Використання певних математичних моделей піксела дозволяє отримати відносно прості з обчислювальної точки зору методи антиаліайзингу [7, 8]. Такі методи отримали назву крайового антиаліайзингу, оскільки, як правило, розглядають лише пікселі розташовані на краях об’єктів [7]. Для кожного виду графічних примітивів використовуються різні підходи, що порівняно з методами надлишкової вибірки є певним недоліком. Проте аналітичні методи характеризуються значно меншою обчислювальною складністю та забезпечують кращу якість згладжування, оскільки враховують особливості та обмеження пристроїв відображення [7, 8].

Розглянемо основні моделі пікселів, які використовуються в аналітичних методах. Найбільше розповсюдження отримала модель, у якій піксел розглядається як квадрат зі стороною, що дорівнює одиниці [7, 8, 3, 4]. Центр квадрата збігається із центром піксела. Функція фільтра для даної моделі має такий вигляд:

$$F(x,y)=\begin{cases}1\ ,\ якщо\ |x|\le 0.5\ та\ \ |y|\le 0.5;\\ 0,\ якщо\ |x|>0.5\ та\ \ |y|>0.5.\end{cases}$$

Обчислення інтегралу (1.1) для даної моделі зводиться до обчислення площі тієї частини квадрата, яка покривається графічним примітивом [14]. Інтенсивність кольору піксела при цьому визначається за формулою:

$$I_P = S\cdot I_M + (1-S)\cdot I_\Phi . \tag{1.2}$$

Приведена модель на даний час найбільш поширена, оскільки для геометричних графічних примітивів знаходження площі покриття не потребує значних обчислювальних витрат [4, 5, 14]. Однак, у більшості пристроїв відображення інформації просторове розподілення інтенсивності світла, що випромінюється на екрані, не має форми квадрата, тому дана модель не забезпечує максимальної якості згладжування границь зображення [106, 88].

Для пристроїв відображення, які використовують ЕПТ, більш адекватною є “гаусівська” модель [6]:

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi R^2}e^{\frac{x^2+y^2}{-2R}} ,$$

де R - радіус фільтра. Для більшості випадків $R=1$.

Дана модель враховує, що інтенсивність світла, яке випромінює піксел, є максимальною в центрі та зменшується в напрямку до границі піксела і на відстані R дорівнює нулю [80]. Обчислення інтегралу (1.1) для такої моделі зводиться до обчислення об'єму фігури, яка утворюється в результаті перетину функції фільтра та границь примітива[4].

Для LCD моніторів у якості функції фільтра часто використовують функцію Хемінга вигляду:

$$F(x,y)=\begin{cases}\left(\cos\left(\dfrac{\pi\cdot x}{W}\right)\cos\left(\dfrac{\pi\cdot y}{W}\right)\right)^{e}, \text{якщо } |x|\le\dfrac{W}{2} \text{ та } |y|\le\dfrac{W}{2}\\ 0, \text{ якщо } |x|>\dfrac{W}{2} \text{ та } |y|>\dfrac{W}{2}\end{cases},$$

де W, e - параметри, які забезпечують настроювання моделі під конкретний пристрій відображення [13].

Оскільки моделі, які використовують функції Хемінга та Гауса, характеризуються відносно великими обчислювальними витратами, то їх використовують тільки у тих випадках, коли до якості крайового згладжування пред'являються досить жорсткі вимоги.

Для більшості застосувань не обов'язково, щоб функція фільтра точно відповідала характеристикам пристрою відображення [8].

На практиці для фільтрації вибирають достатньо прості з обчислювальної точки зору функції і їх модифікують з метою отримання прийнятних зображень [8]. Для широкого класу задач та пристроїв відображення достатню якість забезпечує „конусна" модель піксела [8], яка описується таким виразом:

$$F(x,y)=\begin{cases}H\left(1-\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{R}\right), \text{якщо } \sqrt{x^2+y^2}<R;\\ 0, \text{ якщо } \sqrt{x^2+y^2}\ge R.\end{cases}$$

де H - висота конуса, яку вибирають таким чином, щоб об'єм конуса дорівнював одиниці, R - радіус основи конуса.

Дана модель є спрощеним варіантом „гаусівської" моделі, оскільки вона передбачає, що інтенсивність світла піксела є максимальною в центрі і лінійно зменшується у напрямку до границі піксела [4]. Таке спрощення дозволяє зменшити обчислювальні витрати.

Використання більш якісних моделей піксела обмежено їх значною обчислювальною складністю, тому існує необхідність розробки моделей, які б характеризувались простотою обчислювального процесу та забезпечували достатньо високу якість зображення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Аммерал А. Принципы програмирования в машинной графике: Пер. с англ. - М.: Солсистем, 1992. - 224 с.
2. Вяткин С.И., Долговесов Б.С., Мазурок Б.С. и др. Эффективный метод растрирования изображений для компьютерных систем визуализации реального времени // Автометрия. - 1993. - № 5. - С. 34-52.
3. Петров М.Н. Молочков В.П. Компьютерная графика. – СПб: Петербург, 2002. – 302 с.
4. Романюк О.Н, Курінний М.С. Використання методу оцінювальної функції для задач антиаліайзингу // Матеріали міжнародної науково-технічної конференції „Компьютерные технологии в науке, образовании и промышленности”, Дніпропетровськ 2004.
5. Штрассер В., Шиллинг А., Книттель Г. Архитектуры высокопроизводительных графических систем // Открытые системы. - 1993. -№5. - С. 53-60.
6. ATi Technologies. SMOOTHVISION. White Paper. – ATI. – 2001.48
7. Catmull E. A hidden-surface algorithm with anti-aliasing // Proceedings of SIGGRAPH 78. – 1978. P.6–11.
8. Catmull E. An Analytic Visible Surface Algorithm for Independent Pixel Processing // Computer Graphics (Proceedings of the ACM SIGGRAPH ’84 Conference). – 1984. – P.109–115.
9. Chen T.C. Automatic computation of exponentials, logarithms, ratios, and square roots // IBM J. Res. Dev. – 1972. – P.380-388.

10. Dobkin D., Eppstein D, Mitchell P. Computing the discrepancy with applications to supersampling patterns // ACM Transactions on Graphics (TOG). – 1996. Vol.15. –No.4. – P.354-376.
11. Ferwerda J. A., Greenberg D. P. A psychophysical approach to assessing the quality of antialiased images // IEEE Comput. Graph. Appl. – 1988. Vol. 8. – P.85–95.
12. Legge G. E. ,Foley, J. M. Contrast Masking in human vision // Journal of the Optical Society of America. – 1980. – Vol. 70. – P.1458-1470.
13. Lien S-L., Shantz M., Pratt V. Adaptive forward differencing for rendering curves and surfaces // Comput. Graph. – 1987. – No. 21(4). – P.111-118.84
14. Olano M. A Programmable Pipeline for Graphics Hardware // PhD Dissertation, Department of Computer Science, University of North Carolina at Chapel Hill. - 1998.